선형대수학 개요

BLIS 편입

연고대 편입 전문 과외

$$3x + 2 = 8$$

$$3x + 2 = 8$$
$$x + 1 = 3$$

$$3x + 2 = 8$$

$$x + 2 = 3$$

$$3x + 2y = 8$$

$$ax + by = c$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}
$$

n, m의 영향? $n<m$, $n>m$, $n=m$.

연립방정식의 해의 형태? 해 0, 무수히 有, X.

해를 구하는 방법?

해의 성질?

…

선형연립방정식과 행렬

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$\boxed{AX = b}$$

$$\text{where } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3], \quad \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [4]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

A general 4 × 4 upper triangular matrix

A general 4 × 4 lower triangular matrix

행렬의 덧셈과 뺄셈

크기가 같은 두 행렬 A, B에 대해

1) A, B의 덧셈 $A+B$는 A의 각 성분을 B의 각 성분에 더해서 구한 행렬이다.

즉, 기호로 $A=[a_{ij}].B=[b_{ij}]$일 때, $(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$이다.

2) A, B의 뺄셈 $A-B$는 A의 각 성분에 B의 각 성분을 빼서 구한 행렬이다.

즉, 기호로 $A=[a_{ij}].B=[b_{ij}]$일 때, $(A-B)_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$이다.

행렬의 상수배

행렬 A와 상수 c에 대해 행렬의 상수배 cA는 A의 각 성분에 c배를 하여 구한 행렬이다.

즉, 기호로 $A=[a_{ij}]$일 때, $(cA)_{ij}=ca_{ij}$이다.

행렬의 곱셈

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 2 & 2\times 3 \\ 3\times 4 & 4\times 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

행렬의 연산의 성질

THEOREM 1.4.1 Properties of Matrix Arithmetic

Assuming that the sizes of the matrices are such that the indicated operations can be performed, the following rules of matrix arithmetic are valid.

(a) $A + B = B + A$ **[Commutative law for matrix addition]**

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ **[Associative law for matrix addition]**

(c) $A(BC) = (AB)C$ **[Associative law for matrix multiplication]**

(d) $A(B + C) = AB + AC$ **[Left distributive law]**

(e) $(B + C)A = BA + CA$ **[Right distributive law]**

(f) $A(B - C) = AB - AC$

(g) $(B - C)A = BA - CA$

(h) $a(B + C) = aB + aC$

(i) $a(B - C) = aB - aC$

(j) $(a + b)C = aC + bC$

(k) $(a - b)C = aC - bC$

(l) $a(bC) = (ab)C$

(m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

$(+, \cdot, \times)$

$1+2=2+1$

$f \circ g \neq g \circ f$

$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

$\Downarrow$

$Ax = b.$

일반 방정식

$a^{-1} = \frac{1}{a}.$

$$ax = b$$

$$a^{-1}ax = a^{-1}b$$

$$(a^{-1}a)x = a^{-1}b$$

$$1x = a^{-1}b$$

$$x = a^{-1}b$$

행렬 방정식

역행렬.

$$AX = b$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}b$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}b$$

항등행렬

$$IX = A^{-1}b$$

$$\boxed{X} = A^{-1}b$$

항등행렬

대각선 성분은 전부 1이고 나머지 성분은 전부 0인 n차 정사각행렬을 n차 항등행렬이라 한다.

n차 항등행렬은 일반적으로 기호로 I_n라 한다.

$m \times n$행렬 A에 대해 $AI_n = A, I_m A = A$가 성립한다.

$x = A^{-1}b$.

$Ax = b$.

역행렬

n차 정사각행렬 A에 대해 $AB = BA = I_n$을 만족하는 n차 정사각행렬 B가 존재할 때, A는 가역행렬(invertible matrix)이라 부른다.

이때, B는 A의 역행렬(inverse matrix)이라 부르고, 기호로 A^{-1}라 한다.

n차 정사각행렬 A에 대해 A의 역행렬은 존재한다면 유일하다.

$3^{-1} = \frac{1}{3}.$ $Ax = b.$

$A^{-1}?$

$$AX = b$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}b$$
$$(A^{-1}A)X = A^{-1}b$$
$$IX = A^{-1}b$$
$$X = A^{-1}b$$

역행렬이 존재할 조건은?

역행렬의 계산은?

역행렬이 존재하지 않을 때의 해를 구하는 방법?

이차정사각행렬의 행렬식

이차정사각행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$에 대해 A의 행렬식 $\det(A)$는 다음과 같이 정의한다.

$$\det(A) = ad - bc$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = 1\times4 - 2\times3 = -2.$$

n차정사각행렬의 행렬식

$n \times n$행렬 A의 어떤 행 또는 열을 골라도 그 행 또는 열의 각각 성분의 여인수를 구해 각 성분과 곱하여 다 더한 값이 서로 같다. 이 더한 값을 A의 행렬식 $\det(A)$라 정의하고, 여인수를 구해 각 성분과 곱하여 다 더하는 것을 여인수 전개 (cofactor expansion)이라 한다.

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$ (j번째 열에 대한 여인수 전개)

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$ (i번째 행에 대한 여인수 전개)

A^{-1} 존재!　　$AX=b \Rightarrow X=A^{-1}b$.

행렬식과 가역행렬

정사각행렬 A에 대해 $\det(A) \neq 0$이면 A는 **가역행렬**이다. 또한, **그 역도 성립**한다.

특히, A의 역행렬 A^{-1}에 대해 $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$이다.

O

$A \to 3,\ 2,\ 1$

행렬식이 항상 존재하는가?

행렬식은 모든 행렬에 대해 유일한가? O

행렬식의 또 다른 유용성?

함수 $f(X)$.

행렬 곱

$$AX = b$$

선형사상의 대응

행렬

$$L(X) = b$$

$$X \xrightarrow{L} b$$

$$X \to \boxed{L} \to b.$$

사상

S, S'을 집합이라 하자.
S에서 S'으로 가는 사상 (mapping, map)이란 S의 각 원소에 S'의 한 원소를 대응시키는 규칙을 말한다.
이때, $F : S \to S'$으로도 적는다.

$$x \in S \xrightarrow{F} F(x) \in S'$$

$m \times n$

$$AX = b \qquad\qquad L(X) = b$$

$$X \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{L} b \in \mathbb{R}^m$$

행렬곱 ⟺ 함수 대응.

- 간단, 쉬움
- 도출 X.

- 복잡, 어려움.
- 도출 할것 많다.

(1,2), (2,3)

벡터공간

행렬, 함수, 정수: 공리 (Axiom).

선형사상.

$X \longrightarrow Y$

정의역 공역

$V(+, \cdot)$

집합.

$f(x)$

{연세대, 고려대}

{1, 2, 3, ...}. +.

DEFINITION 1 Let V be an arbitrary nonempty set of objects on which two operations are defined: addition, and multiplication by numbers called ***scalars***. By ***addition*** we mean a rule for associating with each pair of objects $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ in V an object $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, called the ***sum*** of $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$; by ***scalar multiplication*** we mean a rule for associating with each scalar k and each object $\mathbf{u}$ in V an object $k\mathbf{u}$, called the ***scalar multiple*** of $\mathbf{u}$ by k. If the following axioms are satisfied by all objects $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ in V and all scalars k and m, then we call V a ***vector space*** and we call the objects in V ***vectors***.

1. If $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ are objects in V, then $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ is in V.
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
3. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
4. There is an object $\mathbf{0}$ in V, called a ***zero vector*** for V, such that $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ for all $\mathbf{u}$ in V.
5. For each $\mathbf{u}$ in V, there is an object $-\mathbf{u}$ in V, called a ***negative*** of $\mathbf{u}$, such that $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$.
6. If k is any scalar and $\mathbf{u}$ is any object in V, then $k\mathbf{u}$ is in V.
7. $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$
8. $(k+m)\mathbf{u}=k\mathbf{u}+m\mathbf{u}$
9. $k(m\mathbf{u})=(km)(\mathbf{u})$
10. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

$V \xrightarrow{F} V'$

선형사상

V, V'을 **벡터공간**이라 하자. 다음 조건을 만족하는 사상 $F : V \to V'$를 선형사상이라 한다.

1) V의 임의의 원소 u, v에 대해 $F(u+v) = F(u) + F(v)$가 성립한다.

2) K의 모든 원소 c와 V의 원소 v에 대해 $F(cv) = cF(v)$가 성립한다.

$$AX = b \quad \Rightarrow \quad L(X) = b$$

행렬 대응의 일반화

$L'(X) = A'X.$

행렬 ⟷ 선형사상.
• 쉬움, 간단. • 어려움, 복잡.

$$AX = b \longrightarrow L(X) = b$$

행렬에 대응하는 선형사상을 어떻게 구하는가?

임의의 선형사상에 대해 대응하는 행렬이 항상 존재하는가? O

만약 존재한다면 유일한가? O.

$$AX = b \quad \Longleftrightarrow \quad L(X) = b$$

행렬에 대응하는 선형사상을 어떻게 구하는가?

임의의 선형사상에 대해 대응하는 행렬이 항상 존재!

임의의 선형사상에 대해 대응하는 행렬이 항상 유일!

$$V(+,\cdot)$$

벡터공간의 성질?

벡터공간의 원소의 성질?

벡터공간을 효율적으로 표현하는 방법?

원소가 무한함.

기저

무한. 유한.

벡터 공간 V에 대해 만약 집합 $S=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$이 V의 기저라면, V의 임의의 벡터 v에 대해 $v=c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n$을 만족하는 상수 $c_1, c_2, \dots, c_n$은 유일하다.

좌표

벡터 공간 V에 대해 만약 집합 $S=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$이 V의 기저이고, V의 임의의 벡터 v에 대해
$v=c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n$을 만족하는 상수 $c_1, c_2, \dots, c_n$을
기저 S로 표현한 v의 좌표라고 하고, 이를 기호로 $(v)_S=(c_1, c_2, \dots, c_n)$으로 나타낸다.

기저

벡터 공간 V에 대해 만약 집합 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$이 V의 기저라면, V의 임의의 벡터 v에 대해 $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$을 만족하는 상수 $c_1, c_2, \dots, c_n$은 유일하다.

벡터공간

기저는 유일하지X.

차원

유한 차원 벡터 공간 V에 대해 V의 차원(dimension)은 V의 기저들에 포함된 벡터의 개수로 정의하고, 기호로 $\dim(V)$로 나타낸다.

유한?

유한?

벡터공간.

선형사상의 핵

V, W를 벡터공간이라 하고, $F: V \to W$를 선형사상이라 하자.

$$\ker F = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$$

를 F의 핵(kernel)이라고 한다.

선형사상의 상

$F: V \to W$를 선형사상이라 하자. F의 상 (image)은 다음과 같이 정의한다.

$$Im\ F = \{w \in W \mid F(v) = w\ for\ some\ v \in V\}$$

선형대수학의 기본정리

V, W를 벡터공간이라 하자.

선형사상 $L: V \to W$에 대해 n을 V의 차원, q를 L의 핵의 차원, s를 L의 상의 차원이라 하자.

그러면 $n = q + s$이다. 달리 말하면

$$\dim V = \dim \ker L + \dim Im\ L$$

det(A).

A^{-1}?

n개 m개

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \rightarrow Ax = b.$$

mn개.

m, n ↑ 계산↑

$$\Updownarrow$$

$L(x) = b.$ $\in V$ 벡터공간.

⇒ 선형 기본 정리.

고윳값과 고유벡터

$n \times n$행렬 A라 하자. 0벡터가 아닌 벡터 $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$과 스칼라 λ에 대해 다음이 만족한다고 하자.

$$\boxed{A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}}$$

이 때, λ를 A에 대한 고윳값(eigenvalue)이라 하고, x를 λ에 따른 고유벡터(eigenvector)라 한다.

$$A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$$

계산량이 많음 계산량이 적음

$$\lambda\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\lambda\\2\lambda\\1\lambda\end{bmatrix}$$

정사각행렬의 대각화

$n \times n$ 행렬 A에 대해 만약 $P^{-1}AP$가 대각행렬인 가역행렬 P가 존재한다고 하자.
그렇다면, A를 대각화 가능(diagonalizable)이라 한다. 또한, 가역행렬 P로 A를 대각화했다고 한다.

$$P^{-1}AP = D \qquad A = PDP^{-1}$$

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

계산량이 많음

계산량이 적음

선형대수학을 배우면…

1. 선형연립방정식의 해를 잘 구할 수 있다.

2. 선형연립방정식의 해와 성질에 대해 잘 이해할 수 있다.

3. 선형연립방정식 뿐만 아니라 선형적인 대상에 대해서 잘 이해할 수 있다.

4. 벡터공간으로 표현이 가능한 집합과 연산 체계에 대해서 잘 이해할 수 있다.

5. 선형적인 모든 대상에 대해 추상적인 논의와 체계적인 논의를 진행할 수 있다.

V L

1~9강: 선대 기초 (공학수학 수준).　　　　　2023년도 선대.
10~ : 선대심화 (수학과 수준, Serge Lang). 미적분.
선대 정리. (개요이해, 통달).
기출풀이 (연세대 선형대수학 기출).
Final (모의고사).

강의노트.　필기　숙제　퀴즈.
Quizlet.　Google Forms.
70점.

2월 $\xrightarrow[\text{짧은.}]{\text{긴}}$ 12월

"꾸준함"
"평정심"

증명. ← 수학의 언어.

[Reading
Listening]
[Speaking
Writing.]

증명의 방법.

집합

1. 집합과 원소. 분명하게! (누구에게 물어봐도 같은 답이 나와야 함).

집합? 대상 ← 기준

		A	B	
ex1)	'작은 수의 모임'	$\{1,2,3\}$.	$\{0, 0.1, 0.2\}$.	집합X
ex2)	'3보다 작은 수의 모임'	$\{1,2\}$.	$\{-3,-2,-1,0,1,2\}$.	집합X.
ex3)	'3보다 작은 자연수의 모임'	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$.	집합O.

원소: 집합을 이루는 대상 하나하나.

ex) '3보다 작은 자연수의 모임' $= \{1, 2\}$.

- '$a \in A$' $\Leftrightarrow$ 'a가 집합 A의 원소'.
- '$b \notin A$' $\Leftrightarrow$ 'b가 집합 A의 원소 X'.

2. 집합의 표현 방법

1) 원소나열법. $\{1,2\}$.

① 순서 관계 X.

ex) $\{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \{2,3,1\}$.

② 원소 개수 많음 & 규칙 있음 '...'

ex) '100 이하의 자연수의 모임' $= \{1, 2, \dots, 100\}$.

2) 조건제시법.

x : 원소 대표하는 문자.

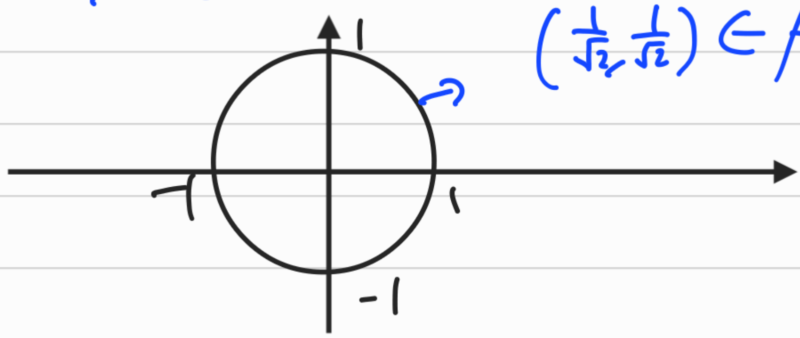
x의 조건 : 원소들의 공통된 성질.

$\{x \mid x$의 조건$\}$.

ex1) $\{1,2\} = \{x \mid x$는 3 미만의 자연수$\} = \{a \mid a$는 3 미만의 자연수$\}$.

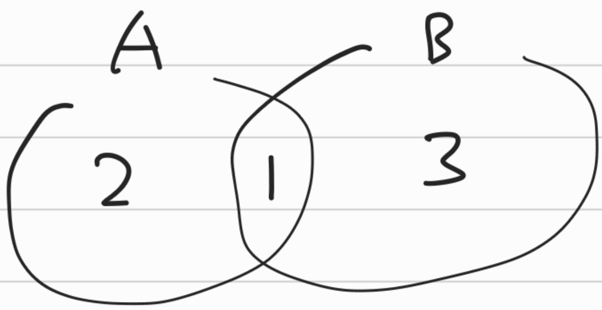
ex2) $\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} = A$

$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in A$, $(1,0) \in A$, ...



3) 벤다이어그램.

ex) $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3\}$.



3. 원소의 개수에 따른 집합의 분류.

유한집합 : 원소가 유한개.

- A : 유한집합, A의 원소의 개수 : $n(A)$.

ex) $A=\{1,2,3,4,5\}$, $n(A)=5$.

무한집합 : 원소가 무한히 많음.

* $\mathbb{N}$: 자연수의 집합.

$\mathbb{Z}$: 정수의 집합 $\rightarrow$ $\mathbb{Z}^+$: 양의 정수의 집합

$\mathbb{Z}^-$: 음의 정수의 집합.

$\mathbb{Q}$: 유리수의 집합.

$\mathbb{R}$: 실수의 집합.

$\mathbb{C}$: 복소수의 집합. $i=\sqrt{-1}\in\mathbb{C}$.

공집합 : 원소가 하나도 X (ϕ)

- $n(\phi)=0$.
- $\phi=\{\ \ \}=\{x \mid \frac{1}{x}=0\}$.

4. 부분집합.

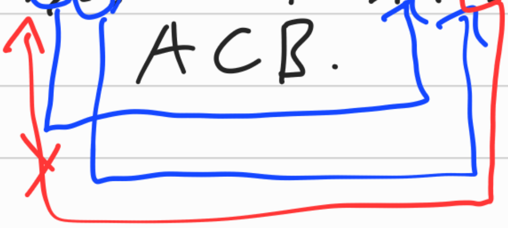
1) 부분집합.

① A, B : 집합.

(A는 B의 부분집합) $\Leftrightarrow$ (A의 모든 원소가 B에 속할 때).

ex) $A=\{1,2\}$ $B=\{1,2,3\}$.

$A \subset B$.



② $A \not\subset B$.

(A는 B의 부분집합 ×) $\Leftrightarrow$ (A의 어떤 원소가 B에 속하지 않을 때).

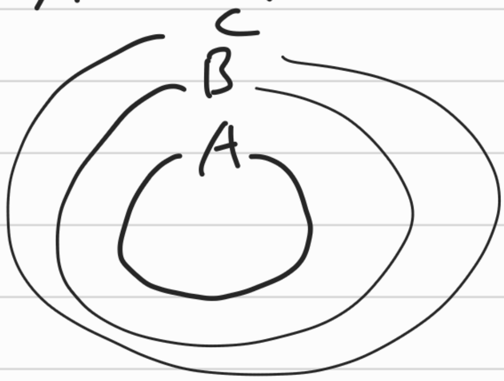
2) 부분집합의 성질.

A, B, C : 집합

① $\emptyset \subset A$.

② $A \subset A$.

③ $A \subset B$고 $B \subset C$면 $A \subset C$.



5. 서로 같은 집합.

1) A, B : 집합 '$A = B$' : '$A \subset B$ & $B \subset A$'.

2) '$A \neq B$' : '$A \not\subset B$ or $B \not\subset A$'.

집합의 연산

1. 합집합

A, B = 집합

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}.$

2. 교집합

A, B = 집합

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}.$

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow$ A와 B는 서로소.

3. 차집합.

A, B = 집합

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$

ex) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 5\}$

$A - B = \{2, 3\}.$

4. 여집합.

전체집합 : U $\qquad A \subset U.$

여집합 : $A^c = \{x \mid x \in U \text{ and } x \notin A\} = U - A.$

A complement.

ex1) $A = \{1, 2\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$

$\Rightarrow A^c = \{3, 4, 5\}.$

ex2) $A = \{1, 2\}$, $U = \mathbb{N}.$

$\Rightarrow A^c = \{3, 4, 5, 6, \ldots\}.$

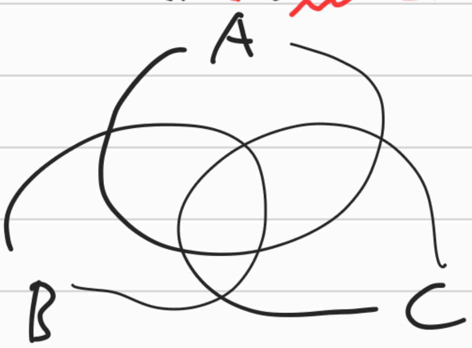
5. 집합의 연산법칙.

3) 분배법칙.

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$.

$a \times (b + c)$
$= a \times b + a \times c$.

pf)



(check!)

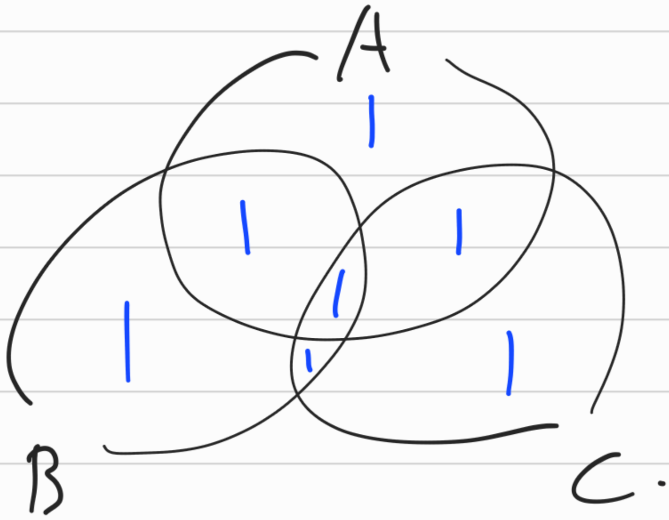
6. 드모르간의 법칙.

U: 전체집합, $A, B \subset U$.

1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

7. 집합의 연산과 원소의 개수.

1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. (check!)
2) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$
$+ n(A \cap B \cap C)$.



⋮

3) $n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = n(A_1) + \cdots + n(A_n) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3)$
$- \cdots - n(A_{n-1} \cap A_n) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
$+ n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \cdots + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$

명제와 조건

1. 명제

참, 거짓 ← 명확하게. → 누구에게 물어봐도 같은 답.

	A	B	
• '3은 1보다 크다'	참	참.	명제.
• '1은 3보다 크다'	거짓	거짓	명제.
• '1은 큰수이다'	ok.	no.	명제X.
• '$2x=8$'	?	?	명제X.

2. 명제의 부정.

p=명제. 'p가 아니다': p의 부정, $\sim p$, $\neg p$.
not not

ex) ~'1은 3보다 크다' = '1은 3보다 크지 않다'.

p : 참 $\Rightarrow$ $\neg p$=거짓.

p=거짓 $\Rightarrow$ $\neg p$=참.

$\neg(\neg p) = p$.

3. 조건.

ex) '$2x=8$', '$x^2=1$'.

4. 진리집합.

$\{x \in U \mid p(x)$: 참$\} = P$ (조건 p에 대한 진리집합).

ex1) $p(x)$='$2x=8$', $U=\mathbb{N}$.
$P=\{4\}$.

ex2) $q(x)$='$2x=0$', $U=\{4,5,6\}$.
$Q=\emptyset$.

ex3) $r(x)$='$x^2=1$', $U=\mathbb{Z}$.
$R=\{-1,1\}$.

5. 조건의 부정.

p = 조건. 'p가 아니다': 조건 p의 부정, $\sim p$, $\neg p$.

조건의 부정의 진리집합.

U = 전체집합, p = 조건 ⇒ P = 조건 p의 진리집합.

⇒ $\neg p$의 진리집합 = P^c.

ex) $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

$p(x)$ = '$x < 1$'. $\neg p(x)$ = '$x \geq 1$'.

$\downarrow$ $\downarrow$

$P = \{-3, -2, -1, 0\}$. $\neg P = \{1, 2\} = P^c$.

6. '또는'과 '그리고'의 진리집합.

$p \to P$ $q \to Q$.

1) ① 'p or q'의 진리집합: $P \cup Q$.

② 'p and q'의 진리집합: $P \cap Q$.

$\{x \in U \mid p$ and q가 참$\}$.

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ and $x \in B\}$.

$\shortparallel$

$\{x \in U \mid p(x)$가 참 and $q(x)$가 참$\}$.

$\shortparallel$

$\{x \in U \mid p(x)$=참$\} \cap \{x \in U \mid q(x)$=참$\}$.

$\shortparallel$

$P \cap Q$.

2) $\neg$ 'p or q' = '$\neg p$ and $\neg q$'.

$\neg$ 'p and q' = '$\neg p$ or $\neg q$'.

pf) $\neg$'p or q' $p \to P$, $q \to Q$.

$\downarrow$

(p or q의 진리집합$)^c$.

$\downarrow$

$(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c$ = ($\neg p$의 진리집합) $\cap$ ($\neg q$의 진리집합)

= ($\neg p$ and $\neg q$의 진리집합).

조건으로 이루어진 명제

1.

p, q = 조건.

'p이면 q이다' $\Rightarrow$ $\underbrace{p}_{\text{가정}} \rightarrow \underbrace{q}_{\text{결론}}$.

ex) '$\underbrace{x=1}_{\text{가정}}$이면 $\underbrace{x+2=3}_{\text{결론}}$이다'.

$p \rightarrow q$.
$P \quad Q$.

- $P \subset Q \Leftrightarrow p \rightarrow q$ = 참
- $P \not\subset Q \Leftrightarrow p \rightarrow q$ = 거짓. (check)

pf) ($\Rightarrow$)

$P \subset Q$이라 하자. x: P의 원소 $\Rightarrow$ x: Q의 원소.

$p(x)$ = 참. $\Rightarrow$ $q(x)$ = 참.

$P = \{x \in U \mid p(x) = \text{참}\}$.

($\Leftarrow$)

$p \rightarrow q$ = 참이라 하자, $p(x)$: 참 $\Rightarrow$ $q(x)$ = 참.

$x \in P$. $\Rightarrow$ $x \in Q$.

$\therefore P \subset Q$.

$p \rightarrow q$ 거짓임을 보이기.

($P \not\subset Q$).

: p는 만족시키지만 q는 만족하지 않는 x. 반례.

ex) 'x가 소수이면 x는 홀수이다'.

반례 : $x = 2$ (소수이지만 홀수가 아님).

2. '모든' 이나 '어떤' 을 포함하는 명제.

U=전체집합, $p \to P$.

1) '모든 x에 대하여 p이다' $\begin{cases} P=U \text{ 이면 참} \\ P \neq U \text{ 이면 거짓.} \end{cases}$

2) '어떤 x에 대하여 p이다' $\begin{cases} P \neq \phi \text{ 이면 참} \\ P = \phi \text{ 이면 거짓.} \end{cases}$

1-1) ~'모든 x에 대하여 p이다' = '어떤 x에 대하여 ~p이다'.

1-2) ~'어떤 x에 대하여 p이다' = '모든 x에 대하여 ~p이다'.

3. 명제의 역과 대우.

$p \to q$.

1) $q \to p$ ($p \to q$의 역).

2) $\sim q \to \sim p$ ($p \to q$의 대우).

- 명제 참 ⇔ 대우 참
- 명제 거짓 ⇔ 대우 거짓.

ex) '$x=1$이면 $x^2=1$이다'.

- 역 : '$x^2=1$이면 $x=1$이다'.
- 대우 : '$x^2 \neq 1$이면 $x \neq 1$이다'.

4. 삼단논법.

p, q, r = 조건.

If $p \to q$ = 참 & $q \to r$ = 참, then $p \to r$ = 참.

pf) $\left.\begin{array}{l} p \to q = \text{참} \Leftrightarrow (P \subset Q) \\ q \to r = \text{참} \Leftrightarrow (Q \subset R) \end{array}\right\} \Rightarrow P \subset Q \subset R \Rightarrow P \subset R$

⇔ $p \to r$ = 참.

5. 충분조건과 필요조건.

1) $p \Rightarrow q$

p: q이기 위한 충분조건

q: p이기 위한 필요조건.

2) ($p \Rightarrow q$ & $q \Rightarrow p$) : ($p \Leftrightarrow q$).

필요충분조건.

6. check!

정량자

1. 범용 정량자 (Universal Quantifier).

'$\forall$' (For all).

ex) '자연수의 제곱은 자연수다'.

$\Rightarrow$ '$\forall x \in \mathbb{N},\ x^2 \in \mathbb{N}$'.

For all x in $\mathbb{N}$, x^2 in $\mathbb{N}$.

2. 존재 정량자 (Existential Quantifier).

'$\exists$' (There exists).

ex1) '$x \in P$인 U에 속하는 어떤 원소 x가 존재한다'.

$\Rightarrow$ '$\exists x \in U$ such that $x \in P$'.

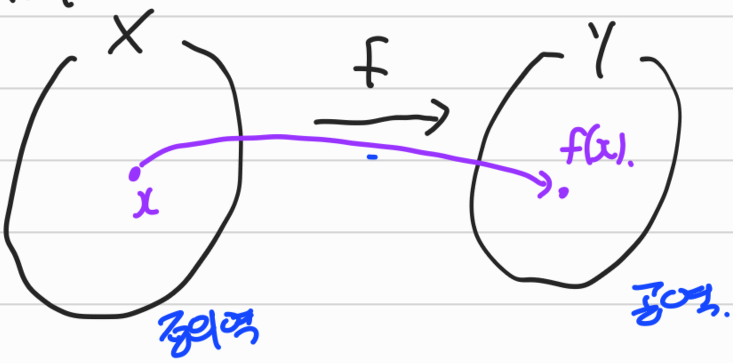
There exists x in U s.t. x in P.

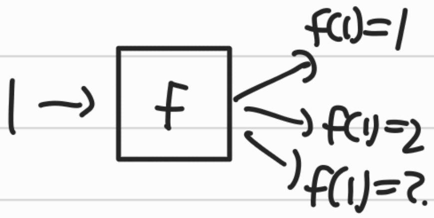
ex2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}$ s.t. $x < y$.

3. 유일존재 정량자 (Unique Existential Quantifier).

'$\exists!$' (There exists unique).

ex) '함수'.





"정의역의 모든 원소 x에 대해 함숫값 f(x)가 유일하게 존재".

$\Rightarrow$ '$\forall x \in X,\ \exists!\ y \in Y$ s.t. $y = f(x)$'.

For all x in X, there exists unique y in Y s.t. $y = f(x)$.

증명의 방법

"$p \longrightarrow q$"

? ?

일대일대응이면 전사함수다.

1. Direct Proof.

"직접 계산", "정의 이용".

WTS: $p \to t$.

Want To Show.

ex) $p \to q \to r \to s \to t$.

"홀수의 제곱은 홀수다"

pf) n: 홀수 $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ s.t. $n = 2k+1$ (조건식의 정의).

$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$

$2k^2+2k = k' \in \mathbb{Z}$ $\quad = 2(2k^2+2k)+1$ (직접 계산).

$\Rightarrow n^2 = 2k'+1$

$\Rightarrow n^2 =$ 홀수 (결과식의 정의).

2. 대우를 이용한 증명.

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

ex) '제곱이 짝수인 정수는 짝수이다'.

대우: '어떤 정수에 대해 그수가 홀수라면 제곱이 홀수이다'.

(참!).

3. 귀류법.

WTS: $p \Rightarrow q$.

가정: $(p \Rightarrow \sim q)$ … 모순!

wrong!

ex) '$\sqrt{2}$는 무리수다'.

가정: $\sqrt{2}$는 유리수다.

$\Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{Z}$, p, q는 서로소 s.t. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$

$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \underbrace{2q^2}_{\text{짝수}} = p^2$. $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ s.t. $p = 2k$.

$\Rightarrow 2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$.

$\Rightarrow q^2 = \underbrace{2k^2}_{\text{짝수}}$. $\Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}$ s.t. $q = 2k'$.

$\therefore$ $q = 2k'$, $p = 2k$. $\Rightarrow$ p와 q는 2를 공약수로 가짐.

$\Rightarrow$ p와 q가 서로소라는 가정에 모순!

$\therefore$ $\sqrt{2}$는 무리수다.

ex) $\sqrt{3}$은 무리수다. (check!).

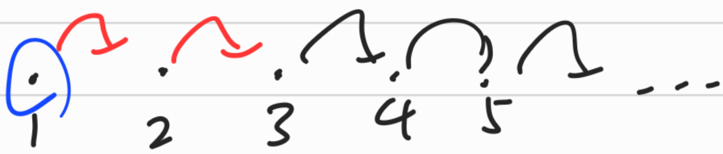
4. 수학적 귀납법.

$p(n)$: $n \in \mathbb{N}$에 따르는 명제.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $p(n)$=참 if

① $p(n)$이 $n=1$에서 성립 ($p(1)$=참).

② $\forall k \in \mathbb{N}$, $p(k)$=참 $\Rightarrow$ $p(k+1)$=참.



ex) '$\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}_{p(n)}$'

pf) ① $p(1)$=참.

$$1 = \frac{1 \times 2}{2} = 1.$$

② $p(k)$=참.

$$\Rightarrow 1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

$$\Rightarrow 1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k+1}{2}(k+2)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$ $\Rightarrow$ $p(k+1)$=참.

$\therefore$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $1+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

5. Disprove (반례찾기).

p → q 성립 X ⟺ p이지만 q가 아닌 조어 존재.

"반례"

ex) $a^n+b^n=c^n$. "페르마의 마지막 정리". $(n \geq 4)$.

* 증명 Process.

p → q.

⓪ p가 뭔지, q가 뭔지 파악.

① 반례 찾아보기. (쉽고 간단한 것).

ex) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

② 반례가 안나오면, 증명.

p(n) X
- * Direct Proof
- * 대우.
- * 귀류법.

"$\sqrt{2}$는 무리수다."
"유리수이면 $\sqrt{2}$는 아니다."

p(n) ○ * 수학적귀납법