

### 증명문제 연습

1. 다음 명제를 증명하시오.

a)  $\sqrt{3}$ 은 무리수다.

b) 자연수  $n$ 에 대하여  $1 + 4 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이다.

2. 실수  $a, b$ 와 자연수  $n$ 에 대해  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 이다.  $\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{3} > 1$ 임을 이용하여 다음 명제를 증명하시오. 단, ' $b > 0$ 일 때,  $\frac{a}{b} > 1$ 이면  $a > b$ 이다.'를 이용하시오.

' $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$  이다.'

3. 실수  $a, b$ 와 자연수  $n$ 에 대해  $(a + b)^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ 이고,  $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ,  $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3} > 1$ 이며,  $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} > 0$ 이다. 이것을 이용하여 다음 명제를 증명하시오.

' $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})^3 > \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6}$  이다.'

(힌트)  $\frac{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})^3}{(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6})} > 1$ 임을 보이시오.

4. 다음 명제의 참, 거짓을 판별하고, 참일 경우 증명하고, 거짓일 경우 반례를 드시오.

1이 아닌 자연수  $n$ 에 대해  $\sqrt{n}$ 는 무리수다.

5. 소수는 1과 자기 자신만으로 나누어 떨어지는 1보다 큰 양의 정수를 말한다. 짝수는 2로 나누었을 때 나누어 떨어지는 정수를 말한다. 이를 이용해 명제 '짝수인 소수는 2가 유일하다'를 증명하시오.

(힌트) 2가 아닌 짝수인 소수  $a \neq 2$ 가 더 존재한다고 가정하고, 논의를 전개함에 따라  $a = 2$ 가 됨을 보이시오.

6.  $a$ 가 0보다 큰 실수라 하자. 수학적 귀납법을 이용해 모든 자연수  $n$ 에 대해  $a^n > 0$ 임을 증명하시오.