증명문제 연습에 대한 해설

1. 다음 명제를 증명하시오.

a) $\sqrt{3}$은 무리수다.

(귀류법)

$\sqrt{3}$이 유리수라고 가정해 보자. 그렇다면 $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ (단, p, q는 서로소, $q \neq 0, p, q \in \mathbb{Z}$)이다. $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$에서 $3 = \frac{p^2}{q^2}$이므로 $3q^2 = p^2$이다. 이때, $q \neq 0$이므로 $p \neq 0$이고 $3q^2 = p^2$에서 p가 3의 배수임을 알 수 있다.
즉, 정수 k에 대해 $p = 3k\ (k \neq 0)$라 쓸 수 있다. 이를 $3q^2 = p^2$에 대입하면, $3q^2 = (3k)^2 = 9k^2$,
$q^2 = 3k^2$을 얻을 수 있다. 이때, $q \neq 0$이므로 $q^2 = 3k^2$에서 q가 3의 배수임을 알 수 있다. 그렇다면, p와 q는 3을 공약수로 가지므로 서로소가 아니다. 따라서, 모순이 생기므로 가정이 틀렸다.
즉, $\sqrt{3}$은 무리수다.

b) 자연수 n에 대하여 $1 + 4 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이다.

(수학적 귀납법)

$n = 1$일 때 $1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$이므로 성립한다.

자연수 k에 대해 $n = k$일 때 성립한다고 가정하자. 그렇다면 $1 + 2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$이다.
이때 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$$1 + 2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1)\left\{\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1\right\}$$
$$= (k+1)\left\{\frac{k(2k+1)}{6} + \frac{6k+6}{6}\right\} = (k+1)\left\{\frac{2k^2+7k+6}{6}\right\} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

이므로 $n = k + 1$에서도 성립한다.

따라서, 자연수 n에 대하여 $1 + 2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이다.

2. 실수 a, b와 자연수 n에 대해 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$이다. $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3} > 1$임을 이용하여 다음 명제를 증명하시오. 단, '$b > 0$일 때, $\frac{a}{b} > 1$이면 $a > b$이다.'를 이용하시오.

'$\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ 이다.'

pf)

$$\frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)} = \frac{\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}\right)}{\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)} = \left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} > 1 + 1 > 1$$

이므로 $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ 이다.

3. 실수 a, b와 자연수 n에 대해 $(a+b)^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$이고, $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3} > 1$이며, $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} > 0$이다. 이것을 이용하여 다음 명제를 증명하시오.

‘$\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}\right)^3 > \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6}$ 이다.’

(힌트) $\frac{\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}\right)} > 1$임을 보이시오.

pf) $\frac{\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}\right)} = \frac{\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)^3}{\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}\right)} = \frac{\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}\right)} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} > 1 + 1 > 1$이므로

$\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} > 0$에서 $\frac{\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)^3}{\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}\right)} > 1$, 즉 $\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}\right)^3 > \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6}$이다.

4. 다음 명제의 참, 거짓을 판별하고, **참**일 경우 **증명**하고, **거짓**일 경우 **반례**를 드시오.

1이 아닌 자연수 n에 대해 $\sqrt{n}$는 무리수다.

반례)

자연수 4에 대해 $\sqrt{4} = 2$는 무리수가 아니다.

5. 소수는 1과 자기 자신만으로 나누어 떨어지는 1보다 큰 양의 정수를 말한다. 짝수는 2로 나누었을 때 나누어 떨어지는 정수를 말한다. 이를 이용해 명제 ‘짝수인 소수는 2가 유일하다’를 증명하시오.

(힌트) 2가 아닌 짝수인 소수 $a \neq 2$가 더 존재한다고 가정하고, 논의를 전개함에 따라 $a = 2$가 됨을 보이시오.

pf)

2는 짝수인 소수이다.

2가 아닌 짝수인 소수 $a \neq 2$가 더 존재한다고 가정하자.

그렇다면 a는 2가 아닌 짝수이므로 2로 나누었을 때 나누어지고, 1, 자기자신 외에 2로도 나눠지게 된다.

따라서 $a = 2$이므로 짝수인 소수는 2가 유일하다.

6. a가 0보다 큰 실수라 하자. 수학적 귀납법을 이용해 모든 자연수 n에 대해 $a^n > 0$임을 증명하시오.

pf)

$n = 1$일 때, $a^1 = a > 0$이므로 성립한다.

$n = k$일 때 $a^k > 0$이라 가정하자. 그렇다면 $a^k \times a = a^{k+1} > 0$이므로 $n = k + 1$에서도 성립한다.

수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대해 $a^n > 0$이다.