1. [50 points]

주어진 명제에 대해 각 명제의 참, 거짓을 판단하고 그 이유에 대해 설명하시오.

(1) [10 points]

멱등행렬의 고윳값의 곱은 0 또는 1 이다.

***관련 개념: 멱등행렬, 고윳값, 행렬식**

***난이도: 중상**

***코멘트: 멱등행렬의 성질을 이용해 주어진 명제를 증명해야 하는 문제이다. 또한, 2 에서 했던 고윳값과 행렬식의 관계를 증명 과정에 가져와야 한다. 아이디어가 떠오른다면 금방 풀 수 있지만, 그렇지 않다면 도출해내기 어렵고 헤맬 수 있다.**

***채점기준:**

참 거짓이 맞음: 5점

이유가 올바름: 5점

Sol)

멱등행렬 A에 대해 $A^2 = A$가 성립한다.

따라서, $\det(A^2) = \det(A)$이다.

한편, $\det(A^2) = \det(AA) = \det(A)\det(A) = (\det(A))^2$에서

$(\det(A))^2 = \det(A)$이고, $(\det(A))^2 - \det(A) = \det(A)(\det(A) - 1) = 0$에서 $\det(A) = 0\ or\ 1$이다.

이때, $\det(A)$는 고윳값의 곱과 같으므로 주어진 명제는 참이다.

(2) [10 points]

벡터 $a_1 = [1,2,1], a_2 = [1,3,4], a_3 = [2,-1,1]$에 대해 $S = [a_1, a_2, a_3]$는 $\mathbb{R}^3$의 기저를 이룬다.

***관련 개념: 기저, 선형독립, 차원**

***난이도: 중상**

***코멘트: 기저의 개념을 잘 이해하여 주어진 벡터 집합이 $\mathbb{R}^3$의 기저집합이 되는 것을 보여야 하는 문제이다. 증명 문제는 방대한 개념에 걸쳐서 출제되고 있지만 기본적인 개념 위주로 나오고 있는 상황이다. 이 문제는 기저의 개념을 잘 이해했다면 충분히 풀 수 있을 것이다.**

***채점기준:**

참 거짓이 맞음: 5점

이유가 올바름: 5점

sol)

먼저 주어진 벡터 집합이 3 개고, $\mathbb{R}^3$의 차원은 3 이므로 주어진 벡터 집합이 선형독립인 것을 보이면 $\mathbb{R}^3$의 기저라고 할 수 있다.

$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0$의 해가 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$이 유일한지 확인하자.

$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = [c_1 + c_2 + 2c_3, 2c_1 + 3c_2 - c_3, c_1 + 4c_2 + c_3] = [0,0,0]$은

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$으로 바꿀 수 있다.

이때,

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$의 행렬식이 14 로 0 이 아니므로 가역행렬이다. 즉, $c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0$의 해가 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$이 유일하다. 즉, 주어진 벡터 집합은 선형독립이다. 그러므로, 주어진 벡터집합은 $\mathbb{R}^3$의 기저이다.

(3) [10 points]

수요곡선이 직선인 경우 수요의 가격탄력도 (price elasticity of demand)는 불변한다.

***채점기준: 수요곡선, 수요의 가격탄력도**

***난이도: 중상**

***코멘트: 2023 기출의 형식을 응용한 문제이다. 수요의 가격탄력도의 불변성에 대해 묻고 있는데, 일반적인 직선형 수요함수를 들면 적절히 반례를 구할 수 있다.**

***채점기준:**

참 거짓이 맞음: 5점

적절한 반례를 제시함: 5점

Sol)

$x^d = a - bp\ (a, b > 0)$과 같이 일반적인 직선의 수요곡선을 예로 들자.

$$e_d = -\frac{dx^d}{dp}\frac{p}{x^d} = b\frac{p}{x^d} = b\frac{p}{a - bp}$$

에서 수요의 가격탄력도는 a, b, p 모두에 대한 함수임을 알 수 있다. 따라서, 주어진 명제는 거짓이다.

(4) [10 points]

함수가 $x = 0$에서 연속일 경우 $x = 0$에서 미분가능하다.

***관련 개념: 미분가능과 연속**

***난이도: 중하**

***코멘트: 미분가능과 연속의 관계는 자주 보이는 증명 문제 중 하나다. 미분가능과 연속의 개념에 대해 잘 인지하고 있다면 간단히 반례를 들 수 있을 것이다.**

***채점기준:**

참 거짓이 맞음: 5점

적절한 반례를 제시함: 5점

Sol)

$y = |x|$는 $x = 0$에서 연속이지만 미분 불가능하다.

(5) [10 points]

함수 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$는 제약조건 $|2x_1| + |2x_2| \leq 1$ 하에서 최솟값 $\frac{1}{4}$을 가진다.

***관련 개념: 실현가능집합, 등위선, 라그랑지 방법**

***난이도: 중**

***코멘트: 최적화 문제는 다수의 연도에서 자주 나왔다. 문제 전반에 걸쳐 실현가능집합을 그리고, 목적함수의 등위선을 그려 나가는 것이 핵심이기에 이런 방법에 익숙하다면 쉽게 풀 수 있다.**

***채점기준:**

참 거짓이 맞음: 5점

풀이가 적절함: 5점

Sol)

실현 가능 집합과 목적 함수의 등위선을 그리면 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$에서 최솟값 $\frac{1}{4}$를 가짐을 알 수 있다.

2. [20 points]

주어진 선형 연립 미분방정식에 대해 다음에 답하시오.

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \ with \ \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

***관련 개념: 고윳값, 고유벡터, 연립 미분방정식**

***난이도: 중상**

***코멘트: 2020 기출에 나왔던 연립 정차방정식 문제와 유사 유형으로 구성했다. 미분방정식도 경제수학 교재에 수록되어 있으므로 충분히 나올 수 있는 문제.**

(1) [10 points]

계수행렬 (coefficient matrix)의 고윳값과 고유벡터를 구하시오.

***채점기준:**

고윳값을 모두 정확히 구함: 5점

고유벡터를 모두 정확히 구함: 5점

Sol)

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$이라 하자.

$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3) - 12 = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = (\lambda - 6)(\lambda + 1) = 0$에서

$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -1$.

$\lambda_1 = 6$에 따른 고유벡터를 구하기 위해

$(\lambda_1 I - A)v_1 = 0$을 풀면 $v_1 = c(3,4)\ (c \neq 0)$.

$\lambda_2 = -1$에 따른 고유벡터를 구하기 위해

$(\lambda_2 I - A)v_2 = 0$을 풀면 $v_2 = c(-1,1)\ (c \neq 0)$.

(2) [10 points]

선형 연립 미분방정식의 해 $x(t), y(t)$를 구하고 이들의 수렴값에 대해 말하시오.

***채점기준:**

선형 연립 미분방정식의 해를 정확히 구함: 5점

수렴값을 정확히 구함: 5점

sol)

a에 의해 다음 연립 미분방정식에 대응하는 동차 방정식의 일반해는 $\mathrm{x} = c_1(3,4)e^{6t} + c_2(-1,1)e^{-t}$

비동차 방정식의 특정해를 구하기 위해 $\mathrm{x}^* = (u, v)$로 가정하고 대입하면

$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2u+3v-1\\4u+3v+1\end{bmatrix}$에서 $u=-1, v=1$.

따라서, 다음 연립 미분방정식의 일반해는

$\mathrm{x}=c_1(3,4)e^{6t}+c_2(-1,1)e^{-t}+(-1,1).$

초깃값을 대입하면

$\begin{bmatrix}x(0)\\y(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=c_1(3,4)+c_2(-1,1)+(-1,1)=\begin{bmatrix}3c_1-c_2-1\\4c_1+c_2+1\end{bmatrix}$

에서 $c_1=1, c_2=-2$. 따라서, 다음 연립 미분방정식의 해는 $\mathrm{x}=(3,4)e^{6t}-2(-1,1)e^{-t}+(-1,1)$

e^{6t}의 영향으로 $x(t), y(t)$는 모두 발산한다.

3. [30 points]

생산요소시장과 생산물 시장이 모두 완전경쟁시장인 상황에서, 어느 기업의 생산함수가 $y(x_1, x_2) = \sqrt{\min\{t_1x_1, t_2x_2\}}$ $(t_1, t_2 > 0)$로 주어져 있다. x_1, x_2는 각각 생산요소 1, 생산요소 2 이다. 생산요소 1 에 대한 단위비용은 $p_1 > 0$이고, 생산요소 2 에 대한 단위비용은 $p_2 > 0$이다. 생산물의 가격은 $p > 0$이다. 다음에 답하시오.

***관련 개념: 이윤극대화, 생산함수, 레온티예프–생산함수**

***난이도: 상**

***코멘트: 경제수학 교재 본문 '21.1 완전경쟁하에서의 이윤극대화'에서 도출된 내용을 레온티에프 생산함수를 이용한 실제 예시로 도출하는 문제이다. 2022 년도 기출에서 응용된 문제로써, 여기서는 생산요소의 단위비용과 레온티예프 생산함수 내에서의 계수도 변수화되어 있다. 실제로 기존 기출문제에서 응용된 문제가 많이 나왔던 만큼, 충분히 나올 수 있는 문제이다. 변수들에 유의하면서 계산해야 한다.**

(1) [5 points]

기업의 무제약 이윤극대화 문제를 쓰시오.

***채점기준:**

적절한 무제약 이윤극대화 문제를 세움: 5점

Sol) $Maximize\left(p\sqrt{\min\{t_1x_1, t_2x_2\}} - p_1x_1 - p_2x_2\right)$

(2) [15 points]

공급함수 $y^*(p, t_1, t_2, p_1, p_2)$를 도출하시오.

***채점기준:**

공급함수를 정확히 구함: 10점

문제의 풀이과정이 적절한 경우: 5점

Sol)

기업의 이윤극대화 문제를 쓰면

극대화: $py - p_1x_1 - p_2x_2$

이때, 총수입 $TR(x_1, x_2) = py(x_1, x_2) = p\sqrt{\min\{t_1x_1, t_2x_2\}}$, 총비용 $TC(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2$에서

만약 $t_1x_1 > t_2x_2$라면 $t_1x_1 = t_2x_2$인 점까지 x_1의 양을 줄여 총수입은 그대로인 상황에서 총비용을 낮출 수 있으므로 이윤을 증가시킬 수 있다.

만약 $t_1x_1 < t_2x_2$라면 $t_1x_1 = t_2x_2$인 점까지 x_2의 양을 줄여 총수입은 그대로인 상황에서 총비용을 낮출 수 있으므로 이윤을 증가시킬 수 있다.

따라서, $t_1x_1 = t_2x_2$일 때 이윤이 극대화됨을 알 수 있다.

따라서, 기업의 이윤극대화 문제는 다음과 같이 바뀐다.

극대화: $py - p_1x_1 - p_2x_2$

제약조건: $t_1x_1 = t_2x_2$

이를 이윤함수 식에 대입하면 $p\sqrt{\min\{t_1x_1, t_1x_1\}} - p_1x_1 - \frac{t_1}{t_2}p_2x_1 = p\sqrt{t_1x_1} - \left(p_1 + \frac{t_1}{t_2}p_2\right)x_1$

이를 미분하여 1 계 조건을 구하면 $\left(p\sqrt{t_1x_1} - \left(p_1 + \frac{t_1}{t_2}p_2\right)x_1\right)' = \frac{1}{2}pt_1(t_1x_1)^{-\frac{1}{2}} - \left(p_1 + \frac{t_1}{t_2}p_2\right) = 0$

$$where\ x_1^* = \frac{1}{4t_1}\left(\frac{pt_1t_2}{t_1p_2 + t_2p_1}\right)^2, x_2^* = \frac{1}{4t_2}\left(\frac{pt_1t_2}{t_1p_2 + t_2p_1}\right)^2$$

2 계 조건을 확인하면 $\left(p\sqrt{t_1x_1} - \left(p_1 + \frac{t_1}{t_2}p_2\right)x_1\right)'' = -\frac{1}{4}pt_1^2(t_1x_1)^{-\frac{3}{2}} < 0$ 에서 2 차 충분조건이 성립한다.

즉, $x_1^* = \frac{1}{4t_1}\left(\frac{pt_1t_2}{t_1p_2+t_2p_1}\right)^2, x_2^* = \frac{1}{4t_2}\left(\frac{pt_1t_2}{t_1p_2+t_2p_1}\right)^2$이 생산요소 1 과 생산요소 2 의 최적 투입량이다.

따라서, $y^*(p, t_1, t_2, p_1, p_2) = \sqrt{\min\{t_1x_1^*, t_2x_2^*\}} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{pt_1t_2}{t_1p_2+t_2p_1}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{pt_1t_2}{t_1p_2+t_2p_1}\right)$

(3) [5 points]

$\frac{\partial y^*}{\partial t_1}$의 부호를 판정하고 이것이 의미하는 바에 대해 설명하시오.

***채점기준:**

$\frac{\partial y^*}{\partial t_1}$를 정확히 구함: 2점

부호를 정확히 구함: 1점

의미하는 바에 대해 잘 설명함: 2점

Sol)

$$\frac{\partial y^*}{\partial t_1} = \frac{1}{2}\frac{pt_2^2p_1}{(t_1p_2 + t_2p_1)^2} > 0$$

에서 t_1의 한 단위 증가에 따라 최적 공급량이 증가함을 알 수 있다. 이는 t_1의 증가에 따라 같은 투입량이어도 $\min\{t_1x_1, t_2x_2\}$의 값이 커지기 때문이라고 볼 수 있다.

(4) [5 points]

$\frac{\partial^2 y^*}{\partial t_1^2}$의 부호를 판정하고 이것이 의미하는 바에 대해 설명하시오.

***채점기준:**

$\frac{\partial^2 y^*}{\partial t_1^2}$를 정확히 구함: 2점

부호를 정확히 구함: 1점

의미하는 바에 대해 잘 설명함: 2점

Sol)

$$\frac{\partial^2 y^*}{\partial t_1^2} = -\frac{pt_2^2p_1p_2}{(t_1p_2 + t_2p_1)^3} < 0$$

에서 t_1의 한 단위 증가에 따라 t_1의 한 단위 증가에 따른 최적 공급량의 증가가 감소함을 알 수 있다. 이는 t_1 의 증가에 따라 같은 투입량이어도 $\sqrt{\min\{t_1x_1, t_2x_2\}}$ 의 증가율이 감소하기 때문이라고 볼 수 있다.