

설

1. 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x(x+1)} - 1 - x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3}{x^4}$ 의 값을 계산한 것으로 올바른 것을 고르시오. [4pts]

- ① $\frac{7}{8}$ ② $\frac{11}{12}$ ③ $\frac{23}{24}$ ④ 1 ⑤ $\frac{25}{24}$

*관련 개념 : 매클로린 급수와 극한

*난이도 : 중상

*코멘트 : 지수항을 매클로린급수로 표현하여 다항식 꼴로 만들어주면, 값이 생각보다 간단히 정리가 된다. 그것을 발견했다면 매우 쉽게 풀 수 있었을 유형

*정답 : 5 (해설은 강의 참고)

2. 함수 $f(x) = x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$ 가 주어졌다. 정수가 아닌 실수 a 에서 함수 $f(x)$ 가 미분 가능하다고 할 때, $f'(a)$ 의 값으로 올바른 것을 고르시오. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.) [4pts]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

*관련 개념 : 미분가능성과 미분계수의 정의

*난이도 : 중하~중

*코멘트 : 가우스 기호가 들어가 있어서 당황을 했을수도 있으나.. 직접 그래프를 그려보거나 아니면 가우스의 정의에 맞게 미분계수의 정의 식을 한 번만 써보면 값은 의외로 매우 쉽게 나옴.

*정답 : 4 (해설은 강의 참고)

3. $\int_0^1 (\sqrt[3]{1-x^7} - \sqrt[7]{1-x^3}) dx$ 의 값을 구하시오. [4pts]

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

*관련 개념 : 역함수와 적분

*난이도 : 상

*코멘트 : 대부분의 학생은 아마 이 함수의 원시함수를 찾기위해 노력을 했을것이나.. 실제로 이 문제는 원시함수 찾기가 매우매우 어려움. 변수 x 와 y 의 위치를 바꿔보게 되면 역함수의 관계를 찾을 수 있고, 그러면 답은 쉽게 나옴. 그러나 역함수의 논리를 이용해 접근해야 한다는 발상 자체가 난이도가 높은 문제

*정답 : 2 (해설은 강의 참고)

4. 평면 $4x - 3y + 8z = 5$ 는 콘 모양 $z^2 = x^2 + y^2$ 와 타원 모양으로 만난다. 이때 타원 위의 가장 높은 점과 낮은 점의 값을 구한 후 서로 곱했을 때의 값으로 올바른 것을 구하시오.[4pts]

- ① $\frac{25}{39}$ ② $\frac{26}{39}$ ③ $\frac{9}{13}$ ④ $\frac{28}{39}$ ⑤ $\frac{29}{39}$

*관련 개념 : 라그랑지 승수법 (or 극좌표와 삼각함수의 합성)

*난이도 : 중상

*코멘트 : 라그랑지 승수법으로 접근해보면 생각보다 계산이 매우 까다로움. 그래서 라그랑지 승수법으로 접근했다면 계산 때문에 난이도가 꽤 있는 문제이고, 극좌표와 삼각함수의 합성을 활용해서 접근할 수도 있음.

*정답 : 1 (해설은 강의 참고)

5. 임의의 양수 t 에 대하여 $\iiint_{R^3} \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} e^{-\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right)} dV$ 의 값을 구하시오.[4pts]

- ① 0 ② 1 ③ e ④ e^2 ⑤ e^3

*관련 개념 : 구면좌표계와 삼중적분, 그리고 치환적분

*난이도 : 중상~상

*코멘트 : 우선 구면좌표계로 접근을 하여 주어진 식을 간단하게 만들면, rho에 대한 일변수 적분으로 바뀌는데 이 상황에서 적절히 어떤 변수를 또다른 변수로 잘 치환하면 최종적으로 간단한 값을 얻을 수 있음. 그런데, 어떤것을 치환해야 하는지가 생각하기 다소 어려운 문제

*정답 : 2 (해설은 강의 참고)

6. 곡선 C 는 영역 $D = \{(x, y) \in R^2: x^2 - 1 \leq y \leq \cos \frac{\pi x}{2}\}$ 에 양의 방향인 경계선이라 하자. 양수

설

m,n에 대하여 벡터장 $\vec{F} = \frac{y}{mx^2+ny^2}\vec{i} - \frac{x}{mx^2+ny^2}\vec{j}$ 일 때, 선적분 $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 의 값을 계산하시오. [4pts]

- ① $-\frac{2\pi}{\sqrt{mn}}$ ② 0 ③ $\frac{2\pi}{\sqrt{mn}}$ ④ $\frac{4\pi}{\sqrt{mn}}$ ⑤ $\frac{8\pi}{\sqrt{mn}}$

*관련 개념 : 벡터장 상에서 불연속점이 존재하는 폐곡선의 영역에 대한 선적분

*난이도 : 중상

*코멘트 : 일단 주어진 영역을 그려보면 (0,0)을 포함하는 불연속점이 벡터장에 존재하는 폐곡선으로 이루어진 영역이라는 것을 알 수 있고, 그 다음부터는.. 우리가 매우 반복해서 연습했던대로 그린정리 적용 가능한 부분과 그렇지 못한 부분을 분리해줄 (0,0)을 포함하는 곡선을 설정하면 되는데 이 문제의 경우 벡터장의 분모 형태에 따라 우리가 일반적으로 해오던대로 원으로 내부의 임의의 곡선을 설정하는게 아닌 타원으로 설정했어야 함.

*정답 : 1 (해설은 강의 참고)

7. 다음 $n \times n$ 행렬의 행렬식을 $A(n)$ 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{A(2n+1)}{A(2n+2)}$ 의 값을 구하시오. [4pts]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1^{n-1} \\ 1 & 2 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & \dots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & \dots & n^{n-1} \end{bmatrix}$$

- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\sin 1$ ④ $\sin 1 - 1$ ⑤ 1

*관련 개념: 반데르몽드 행렬식, 테일러 급수

*난이도: 상

*코멘트: 반데르몽드 행렬식의 공식을 이용하여 푸는 문제다. 작년 기출문제를 적극 활용하였고, 이 문제는 주어진 행렬식이 n 에 대해 정의가 되어 있기 때문에 해당 공식을 이용해서 문제를 풀 수 있을 것이다. 또한, 테일러 급수를 활용하여 주어진 행렬식을 함수로 표현하고, 해당 값을 구하면 되는 문제다. 연세대는 미적분학과 선형대수학이 복합적으로 어우러지는 문제를 작년에 냈기에 그 경향에 맞춘 문제라고 볼 수 있다.

Sol)

반데르몽드 행렬식의 공식을 이용하면

설

$$A(2n+2) = A(2n+1)(2n+2-1)(2n+2-2) \dots (2n+2-(2n+1)) = A(2n+1)(2n+1)!$$

임을 유도할 수 있다.

즉, 모든 n 에 대해 $\frac{A(2n+1)}{A(2n+2)} = \frac{1}{(2n+1)!}$ 임을 알 수 있다.

따라서, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{A(2n+1)}{A(2n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A(2n+1)}{A(2n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} - 1 = \sin 1 - 1$ 이 성립한다.

이때, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} = \sin 1$ 임을 이용했다.

8. 함수 $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ 가 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \notin Q \end{cases}$ 라고 정의되었을 때, f 는 적분 불가능한지, 적분 가능한지 설명하시오. [9pts]

*관련 개념 : 리만적분가능 / 정적분의 정의

*난이도 : 중

*코멘트 : 직접 유형별 문제에서 다뤘던 예시로,, 직접 정적분의 정의 식에 f 를 대입하여 계산해보면 극한값 자체가 아예 다르게 나오고, 따라서 극한이 유일하지 않으므로 정적분 불가하다는 결론을 내릴 수 있음

*정답 : 해설 참고

*채점 기준 : 유리수 무리수 두 경우 모두에 대해서 리만합의 극한을 구하고, 그 극한이 달라서 적분 불가하다는 논리를 펼쳤으면 만점이고, 두 경우 중 하나만 제대로 구했으면 4점, 나머지는 0점

9. 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 이 $x = c \neq 0$ 에서 수렴한다면 $|x| < |c|$ 인 모든 x 에 대해서 주어진 멱급수가 절대 수렴함을 증명하시오. [12 pts]

*관련 개념 : 멱급수의 수렴성과 기하급수, 비교판정

*난이도 : 중상

*코멘트 : 급수가 수렴하면 더해지는 수열은 0으로 수렴해야 한다는 것에서 시작하여, 입실론 델타 용법으로 식을 정리하고, 결국 문제의 전제에 따라서 기하급수가 만족되며 비교 판정에 의해 급수가 수렴함을 보이는 유형

*정답 : 해설 참고

설

*채점 기준 : 더해지는 수열이 0이라는 것을 언급하고, 이를 이용해 입실론 델타 논법을 사용한 후에, 기하급수 꼴을 만들어 비교 test를 사용한 경우 합하여 10점이고, 여기서 요소가 하나씩 빠질때마다 3점씩 감점

10. x^x 를 $x = 0$ 에서 1이라 정의하고 급수를 적분해서

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n} \text{ 이 됨을 보이시오. [15 pts]}$$

*관련 개념 : 매클로린 급수와 항별적분

*난이도 : 상

*코멘트 : 피적분함수가 밑과 지수에 모두 미지수이므로, 일단 e의 ln 취하고, e^x 매클로린 급수 형태 이용해서 급수꼴로 바꾼다음, 항별적분을 이용하여 부분적분을 여러 번 반복하면 발견되는 규칙에 의해 최종적으로 우리가 원하는 형태를 얻을 수 있음.

*채점 기준 : e의 ln으로 우선 피적분 함수를 바꾸었는지, 그리고 이를 매클로린 급수로 바꾸었는지, 그 후 항별적분을 이용하는 과정과 계산과정에서 규칙을 찾아나가는 과정이 타당한지를 보고 모두 그렇다면 만점. 하나씩 만족하지 못할때마다 5점씩 감점

11. 주어진 사상 T 가 선형인지 판별하고 설명하시오. [9pts]

$$T(x, y, z) = (x, x, x)$$

*관련 개념: 선형 사상

*난이도: 중상

*코멘트: 주어진 사상이 선형임을 보이는 문제는 여러 선형대수학 기출에서 빈출 되는 문제다. 선형 사상의 정의만 안다면 충분히 풀 수 있다. 단계를 생략하는 것을 최대한 지양하고 상세히 적는 것이 필수적이다.

*채점 기준:

선형임을 결론 지음: 3점

선형인 이유에 대해 올바르게 설명함: 6점

Sol)

$X_1 = (x_1, y_1, z_1), X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 라 하자.

설

$$\begin{aligned} T(X_1 + X_2) &= T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2) = (x_1, x_1, x_1) + (x_2, x_2, x_2) \\ &= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) = T(X_1) + T(X_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(cX_1) &= T(c(x_1, y_1, z_1)) = T(cx_1, cy_1, cz_1) \\ &= (cx_1, cx_1, cx_1) = c(x_1, x_1, x_1) = cT(x_1, y_1, z_1) = cT(X_1) \end{aligned}$$

이므로 선형이다.

12. 주어진 집합 S 가 $\mathbb{R}^n$ 의 부분공간인지 판별하고 설명하시오. [9pts]

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0, \text{ where } A: m \times n \text{ real matrix}\}$$

*관련 개념: 부분공간

*난이도: 중상

*코멘트: 주어진 부분집합이 부분공간임을 보이는 문제는 여러 선형대수학 기출에서 빈출 되는 문제이다. 부분공간의 정의만 안다면 충분히 풀 수 있다. 단계를 생략하는 것을 최대한 지양하고 상세히 적는 것이 필수적이다.

*채점 기준:

부분공간임을 결론 지음: 3점

부분공간인 이유에 대해 올바르게 설명함: 6점

Sol)

$$\begin{aligned} A(x + y) &= Ax + Ay = 0 + 0 = 0, \forall x, y \in S \\ A(cx) &= cAx = c0 = 0, \forall x \in S \end{aligned}$$

이므로 부분공간이다.

13. $AB - BA = I$ 를 만족하는 3×3 행렬 A, B 가 존재한다면 하나만 구하고, 그렇지 않다면 근거를 설명하시오. [9pts]

*관련 개념: 트레이스, 트레이스의 성질

*난이도: 중

*코멘트: 트레이스의 성질을 잘 기억했다면 충분히 풀 수 있는 문제이다. 하지만, 해당 행렬이 존재한다고 생각하고 방정식을 풀게 됐다면 많이 헤맸을 수 있다.

*채점 기준:

설

존재하지 않음을 결론 지음: 3점

존재하지 않는 이유에 대해 올바르게 설명함: 6점

Sol)

만약 이를 만족하는 행렬이 존재한다면 $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(I)$ 여야 한다.

그런데, $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(AB) = 0$ 인데 $\text{tr}(I) = 3$ 이므로 이를 만족하지 않는다.

따라서, 해당을 만족하는 행렬은 존재하지 않는다.

14. 다음 명제의 참 거짓을 밝히고 근거를 설명하시오. [9pts]

정사각행렬 A 와 자연수 n 에 대해 $A^n = O$ 이면 $I - A$ 는 가역행렬이다.

***관련 개념:** 행렬의 거듭제곱, 행렬의 전개식, 가역행렬, 역행렬

***난이도:** 중상

***코멘트:** 행렬을 전개하여 주어진 행렬의 역행렬을 구하여 가역행렬임을 보이는 문제이다.

***채점 기준:**

참임을 결론 지음: 3점

그 이유에 대해 올바르게 설명함: 6점

Sol)

$(I - A)(A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + I) = -A^n + I = O + I = I$ 에서 $A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + I$ 는 주어진 행렬의 역행렬이 된다. 따라서, $I - A$ 는 가역행렬이다.